

**Olimpiada Națională de Matematică**

Etapa finală

Iași, 17 Aprilie 2006

**CLASA A VIII-A**

---

---

**Subiectul 1.**

Considerăm o prismă cu 6 fețe, astfel încât 5 dintre fețele sale sunt patrulatere circumscriptibile. Să se arate că toate fețele prisme sunt patrulatere circumscriptibile.

**Subiectul 2.**

Fie  $n$  un număr natural nenul. Să se arate că există un număr natural  $k$ ,  $k \geq 2$  și numerele  $a_1, a_2, \dots, a_k \in \{-1, 1\}$  astfel încât

$$n = \sum_{1 \leq i < j \leq k} a_i a_j.$$

(membrul drept semnifică suma  $a_1 a_2 + a_1 a_3 + \dots + a_1 a_k + a_2 a_3 + \dots + a_2 a_k + \dots + a_{k-1} a_k$ .)

**Subiectul 3.**

Fie  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  un cub și  $P$  un punct variabil pe muchia  $[AB]$ . Planul perpendicular în  $P$  pe  $AB$  intersectează dreapta  $AC'$  în punctul  $Q$ . Notăm  $M$  și  $N$  mijloacele segmentelor  $A'P$  și respectiv  $BQ$ .

a) Să se arate că dreptele  $MN$  și  $BC'$  sunt perpendiculare dacă și numai dacă  $P$  este mijlocul lui  $AB$ .

b) Să se determine valoarea minimă a unghiului dintre dreptele  $MN$  și  $BC'$ .

**Subiectul 4.**

Fie  $a, b, c \in [\frac{1}{2}, 1]$ . Să se arate că

$$2 \leq \frac{a+b}{1+c} + \frac{b+c}{1+a} + \frac{c+a}{1+b} \leq 3.$$

Timp de lucru: 3 ore

Fiecare subiect este notat cu 7 puncte.